

Défis 1ère Spé maths : suites

– Thiaude P.

Défi Suites 01

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que $u_{10} = 12$ et $u_{15} = 42$: que valent u_0 et r ?

Corrigé

La suite (u_n) est arithmétique donc : $u_{15} = u_{10} + (15 - 10) \times r$. Or, $u_{15} = 42$ et $u_{10} = 12$, donc :

$$42 = 12 + 5r \Leftrightarrow 42 - 12 = 5r \Leftrightarrow 30 = 5r \Leftrightarrow \frac{30}{5} = r \Leftrightarrow 6 = r$$

De même, $u_{10} = u_0 + (10 - 0) \times r$, or $u_{10} = 12$ et $r = 6$ donc :

$$12 = u_0 + 10 \times 6 \Leftrightarrow 12 = u_0 + 60 \Leftrightarrow 12 - 60 = u_0 \Leftrightarrow -48 = u_0$$

Conclusion : $u_0 = -48$ et $r = 6$.

n	u			
6	-12			
7	-6			
8	0			
9	6			
10	12			
11	18			
12	24			
13	30			
14	36			
15	42			
16	48			

Défi Suites 02

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que : $u_3 + u_4 + u_5 = 33$ et $u_8 + u_9 = 35,5$; que valent u_0 et r ?

Corrigé

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r donc, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$.

On obtient en particulier : $u_3 = u_0 + 3r$, $u_4 = u_0 + 4r$ et $u_5 = u_0 + 5r$, donc :

$$u_3 + u_4 + u_5 = u_0 + 3r + u_0 + 4r + u_0 + 5r = 3u_0 + 12r$$

Or, $u_3 + u_4 + u_5 = 33$, donc :

$$3u_0 + 12r = 33 \Leftrightarrow 3(u_0 + 4r) = 33 \Leftrightarrow u_0 + 4r = \frac{33}{3} \Leftrightarrow u_0 + 4r = 11$$

De même, on obtient : $u_8 = u_0 + 8r$ et $u_9 = u_0 + 9r$, donc :

$$u_8 + u_9 = u_0 + 8r + u_0 + 9r = 2u_0 + 17r$$

Or, $u_8 + u_9 = 35,5$ donc : $2u_0 + 17r = 35,5$.

Il s'agit donc de résoudre le système :
$$\begin{cases} u_0 + 4r = 11 \\ 2u_0 + 17r = 35,5 \end{cases}$$

En isolant u_0 dans la première équation : $u_0 = 11 - 4r$ (*), puis en remplaçant dans l'autre équation, on obtient :

$$2(11 - 4r) + 17r = 35,5 \Leftrightarrow 22 - 8r + 17r = 35,5 \Leftrightarrow 22 + 9r = 35,5 \\ \Leftrightarrow 9r = 35,5 - 22 \Leftrightarrow 9r = 13,5 \Leftrightarrow r = \frac{13,5}{9} \Leftrightarrow r = 1,5$$

Puis en remplaçant dans (*) : $u_0 = 11 - 4 \times 1,5 = 11 - 6 = 5$.

Conclusion : $u_0 = 5$ et $r = 1,5$.

n	u			
0	5			
1	6,5			
2	8			
3	9,5			
4	11			
5	12,5			
6	14			
7	15,5			
8	17			
9	18,5			
10	20			

$u_3 + u_4 + u_5 = 9,5 + 11 + 12,5 = 33$ ✓ et $u_8 + u_9 = 17 + 18,5 = 35,5$ ✓

Défi Suites 03

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{5n + 3}{n + 2}$$

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1) + 3}{n+1+2} - \frac{5n+3}{n+2} = \frac{5n+5+3}{n+3} - \frac{5n+3}{n+2} \\ = \frac{5n+8}{n+3} - \frac{5n+3}{n+2} = \frac{(5n+8)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(5n+3)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ = \frac{5n^2 + 10n + 8n + 16}{(n+3)(n+2)} - \frac{5n^2 + 15n + 3n + 9}{(n+2)(n+3)}$$

Défi Suites 05 On pose $u_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

1. Déterminer u_1 et u_2 .

La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 3$.

a. Calculer v_0 .

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Corrigé

n	u				
0	12				
1	6				
2	4				
3	3.3333				
4	3.1111				
5	3.037				
6	3.0123				
7	3.0041				
8	3.0014				
9	3.0005				
10	3.0002				

$u_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .

La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

• $u_1 - u_0 = 6 - 12 = -6$ et $u_2 - u_1 = 4 - 6 = -2$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$
par conséquent la suite (u_n) n'est pas arithmétique

• $\frac{u_1}{u_0} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ par conséquent (u_n) n'est pas géométrique

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 3$.

a. Calculer v_0 .

$$v_0 = u_0 - 3 = 12 - 3 = 9$$

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 2 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}u_n - 1}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}(u_n - 3)}{u_n - 3} = \frac{1}{3}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite est géométrique donc :

$$v_n = v_0 \times q^n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or, $v_n = u_n - 3$ donc : $v_n + 3 = u_n$, autrement dit : $u_n = v_n + 3$.

On en déduit :

$$u_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } u_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

Pour $n = 2$, cette formule donne :

$$u_2 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 = 9 \times \frac{1}{9} + 3 = 1 + 3 = 4$$

ce qui est en accord avec la copie d'écran précédente.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 - \left(9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right) \\ &= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right) + 3 - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1 \\ &= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left[\frac{1}{3} - 1\right] = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{9 \times 2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$= -6 \times \frac{1^n}{3^n} = -\frac{6}{3^n}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{6}{3^n}$$

Pour $n = 1$ cette formule donne : $u_2 - u_1 = -\frac{6}{3^1} = -2$

ce qui est en accord avec : $u_2 - u_1 = 4 - 6 = -2$.

Or, $3^n > 0$ et $6 > 0$ donc : $-\frac{6}{3^n} < 0$, par conséquent : $u_{n+1} - u_n < 0$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est (strictement) décroissante.

Défi Suites 06

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$: calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

Corrigé

La suite (u_n) est arithmétique donc, d'après le cours :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{50} = \frac{(u_0 + u_{50}) \times 51}{2}$$

Or, $u_0 = 1$ et $u_{50} = u_0 + (50 - 0) \times r = 1 + 50 \times 4 = 1 + 200 = 201$.

Donc :

$$S = \frac{(1 + 201) \times 51}{2} = \frac{202 \times 51}{2} = 101 \times 51 = 5\,151$$

Conclusion : $S = 5\,151$.

Défi Suites 07

Calculer : $S = 10 + 15 + 20 + 25 + \dots + 10\,000$.

Corrigé

S est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 5$. Déterminons p tel que : $u_p = 10\,000$.

On a : $u_p = u_0 + p \times r$ (Cours)

Or, $u_0 = 10$, $r = 5$ et $u_p = 10\,000$, donc :

$$10\,000 = 10 + p \times 5 \Leftrightarrow 10\,000 - 10 = 5p \Leftrightarrow \frac{9\,990}{5} = p \Leftrightarrow p = 1\,998$$

On a donc : $S = u_0 + \dots + u_{1998}$.

Or, (u_n) étant arithmétique, d'après le cours on a :

$$u_0 + \dots + u_{1999} = \frac{(u_0 + u_{1998}) \times 2\,000}{2}$$

Or, $u_0 = 10$ et $u_{1998} = 10\,000$ donc :

$$u_0 + \dots + u_{1998} = \frac{(10 + 10\,000) \times 1\,999}{2} = 10\,004\,995$$

Finalement : $S = 10\,004\,995$.

Défi Suites 08

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = -4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

- Déterminer la nature de la suite (u_n) .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
- Exprimer v_n en fonction de n .

- Exprimer u_n en fonction de n .

Corrigé

- $u_0 = -4$

$$u_1 = \frac{u_0 + 6}{u_0 + 2} = \frac{-4 + 6}{-4 + 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 6}{u_1 + 2} = \frac{-1 + 6}{-1 + 2} = \frac{5}{1} = 5$$

On a : $u_1 - u_0 = -1 - (-4) = 3$ et $u_2 - u_1 = 5 - (-1) = 6$.

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{-1} = -5$$

On constate que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} = \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - \frac{2(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 2}} \\ &= \frac{\frac{u_n + 6 - 2(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 6 + 3(u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 6 + 3u_n + 6} = \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12} \\ &= \frac{-u_n + 2}{4(u_n + 3)} = \frac{-u_n + 2}{4(u_n + 3)} = \frac{-(u_n - 2)}{4(u_n + 3)} = -\frac{1}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \\ &= -\frac{1}{4} \times v_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{1}{4} \times v_n$ est $-\frac{1}{4}$ est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison : $-\frac{1}{4}$.

b. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{-4 - 2}{-4 + 3} = \frac{-6}{-1} = 6$$

On a : $v_n = v_0 \times q^n$ (Cours).

Or $v_0 = 6$ et $q = -\frac{1}{4}$, donc : $v_n = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_n(u_n + 3) &= u_n - 2 \\ v_n u_n + 3v_n &= u_n - 2 \\ u_n v_n - u_n &= -2 - 3v_n \\ u_n(v_n - 1) &= -2 - 3v_n \\ u_n &= \frac{-2 - 3v_n}{v_n - 1} \end{aligned}$$

$$u_n = \frac{2 + 3v_n}{1 - v_n}$$

En utilisant v_n en fonction de n on obtient :

$$u_n = \frac{2 + 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2 + 18 \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - 6 \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

Vérification

Pour $n = 0$, cette formule donne :

$$u_0 = \frac{2 + 18 \left(-\frac{1}{4}\right)^0}{1 - 6 \left(-\frac{1}{4}\right)^0} = \frac{2 + 18}{1 - 6} = \frac{20}{-5} = -4$$

Pour $n = 2$, cette formule donne :

$$u_2 = \frac{2 + 18 \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{1 - 6 \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2 + 18 \times \frac{1}{16}}{1 - 6 \times \frac{1}{16}} = \frac{\frac{32}{16} + \frac{18}{16}}{\frac{16}{16} - \frac{6}{16}} = \frac{\frac{50}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{50}{16} \times \frac{16}{10} = 5$$

Les deux résultats sont conformes aux valeurs de u_0 et u_2 .

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP DEUXIEME CONDITION SI NÉCESSAIRE		NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP APP SUR + POUR ΔTb1			
Graph1	Graph2	Graph3	n	u	
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)	0	-4	
nMin=0			1	-1	
			2	5	
			3	$\frac{11}{7}$	
			4	$\frac{53}{25}$	
			5	$\frac{203}{103}$	
			n=0		

Défi Suites 09

Chaque année la population d'une ville à la campagne diminue de 5% mais à la fin de l'année 100 nouveaux habitants viennent s'y établir. Il y a 1600 habitants dans cette ville au 1^{er} janvier 2020. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre d'habitants au bout de n années ; ainsi $u_0 = 1600$.

- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 100$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2000$.
 - Calculer v_0 .
 - Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
- Exprimer u_n en fonction de n .
- Démontrer que le nombre d'habitants ne va jamais décroître.
- Démontrer que le nombre d'habitants ne dépassera jamais 2000 habitants.

Corrigé

- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 100$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place n années après 2020 : il y a u_n habitants. La population va ensuite diminuer de 5% donc on va perdre 5% de u_n habitants soit $0,05 \times u_n$ habitants, mais à la fin de l'année 100 nouveaux habitants vont arriver donc la population va augmenter de 100 habitants. L'année suivante, on aura donc un nombre d'habitants égal à :

$$u_n - 0,05u_n + 100 = u_n(1 - 0,05) + 100 = 0,95u_n + 100$$

Autrement dit : $u_{n+1} = 0,95u_n + 100$.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 100$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2000$.

- Calculer v_0 .

$$v_0 = u_0 - 2000 = 1600 - 2000 = -400.$$

Conclusion : $v_0 = -400$.

- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 2000}{u_n - 2000} = \frac{0,95u_n + 100 - 2000}{u_n - 2000} = \frac{0,95u_n - 1900}{u_n - 2000} \\ &= \frac{0,95 \left(u_n - \frac{1900}{0,95} \right)}{u_n - 2000} = \frac{0,95(u_n - 2000)}{u_n - 2000} = 0,95 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,95$ et 0,95 est une constante donc

(v_n) est géométrique de raison 0,95.

- Exprimer v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ (Cours)}$$

Or, $v_0 = -400$ et $q = 0,95$ donc $v_n = -400 \times 0,95^n$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -400 \times 0,95^n$.

- Exprimer u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - 2000$ donc $u_n = v_n + 2000$.

Or, $v_n = -400 \times 0,95^n$ donc $u_n = -400 \times 0,95^n + 2000$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -400 \times 0,95^n + 2000$.

vérification

La formule précédente donne : $u_2 = -400 \times 0,95^2 + 2000 = 1639$
ce qui est conforme à ce que la calculatrice détermine directement :

n	u			
0	1600			
1	1620			
2	1639			
3	1657.1			
4	1674.2			
5	1690.5			
6	1706			
7	1720.7			
8	1734.6			
9	1747.9			
10	1760.5			

$n=2$

4. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= -400 \times 0,95^{n+1} + 2\,000 - (-400 \times 0,95^n + 2\,000) \\&= -400 \times 0,95^n \times 0,95 + 2\,000 + 400 \times 0,95^n - 2\,000 \\&= -400 \times 0,95^n \times 0,95 + 400 \times 0,95^n \times 1 \\&= 400 \times 0,95^n (-0,95 + 1) \\&= 400 \times 0,95^n \times 0,05 \\&= 400 \times 0,05 \times 0,95^n \\&= 20 \times 0,95^n\end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 20 \times 0,95^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $20 > 0$ et $0,95^n > 0$ donc $20 \times 0,95^n > 0$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

On en déduit que le nombre d'habitants va toujours aller en augmentant, donc qu'il ne va jamais décroître.

5. Démontrer que le nombre d'habitants ne dépassera jamais 2 000.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_n - 2\,000 = -400 \times 0,95^n + 2\,000 - 2\,000 = -400 \times 0,95^n$

Or : $-400 < 0$ et $0,95^n > 0$ donc : $-400 \times 0,95^n < 0$ autrement dit :

$u_n - 2\,000 < 0$, ou encore : $u_n < 2\,000$.

Le nombre d'habitants ne dépassera donc jamais 2 000.

Défi Suites 10

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 3$

• Calculer : $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note S_n la somme des termes de (u_n) de u_0 à u_n :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0,1n^2 + 3,1n + 3$.

En déduire le plus petit entier naturel n_0 pour lequel la somme des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_n dépasse 1 200.

Corrigé

(u_n) ARITH, $u_0 = 3$, raison = 0,2

• Calculons S_2 :

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \sum_{k=0}^2 u_k$$

Or, $u_1 = u_0 + 0,2 = 3 + 0,2 = 3,2$ et $u_2 = u_1 + 0,2 = 3,2 + 0,2 = 3,4$
donc : $S_2 = 3 + 3,2 + 3,4 = 9,6$.

Conclusion : $S_2 = 9,6$.

• Pour tout entier naturel n , S_n la somme des termes de (u_n) de u_0 à u_n ,

Montrons que : $S_n = 0,1n^2 + 3,1n + 3$.

La formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique donne :

$$u_0 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n + 1)}{2}$$

Or, $u_0 = 3$ et $u_n = u_0 + n \times r = 3 + n \times 0,2 = 0,2n + 3$, donc :

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{(3 + 0,2n + 3)(n + 1)}{2} = \frac{(0,2n + 6)(n + 1)}{2} = \frac{2(0,1n + 3)(n + 1)}{2} \\&= (0,1n + 3)(n + 1) = 0,1n^2 + 0,1n + 3n + 3 = 0,1n^2 + 3,1n + 3.\end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 0,1n^2 + 3,1n + 3$.

Pour $n = 2$ la formule précédente donne

$S_2 = 0,1 \times (2)^2 + 3,1 \times 2 + 3 = 0,1 \times 4 + 6,2 + 3 = 0,4 + 6,2 + 3 = 9,6$
on retrouve bien le résultat obtenu au premier point

Déterminons le plus petit entier naturel n_0 tel que la somme des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_n dépasse 1 200.

Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $0,1x^2 + 3,1x + 3 > 1\,200$.

Elle s'écrit aussi : $0,1x^2 + 3,1x + 3 - 1\,200 > 0$, c'est-à-dire :

$$0,1x^2 + 3,1x - 1\,197 > 0$$

$0,1x^2 + 3,1x - 1\,197$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 0,1$, $b = 3,1$ et $c = -1\,197$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3,1^2 - 4(0,1)(-1\,197) = 488,41$$

$$\sqrt{\Delta} = 22,1$$

$\Delta > 0$ donc $0,1x^2 + 3,1x - 1\,197$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3,1 - 22,1}{2(0,1)} = -126$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3,1 + 22,1}{2(0,1)} = 95$$

On en déduit que pour $0 \leq n \leq 95$ on a : $S_n \leq 1\,200$ et pour $n \geq 96$, on a : $S_n > 1\,200$ donc $n_0 = 96$.

Défi Suites 11

Soient a et b deux constantes réelles et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

1. Dans cette question, on suppose $a = 1$.

Déterminer la nature de (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n et u_0 .

2. Dans cette question, on suppose $a \neq 1$.

a. Montrer que l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution.

Dans toute la suite, on note c cette solution.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - c$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique, exprimer v_n en fonction de n , u_0 et c . En déduire u_n en fonction de n , u_0 , a et b .

Corrigé

u_0 donné, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$

1. $a = 1$

• nature de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a = 1 \text{ donc } u_{n+1} = 1 \times u_n + b = u_n + b.$$

$$D'où : u_{n+1} - u_n = u_n + b - u_n = b.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = b$ et b est une constante donc (u_n) est arithmétique de raison b .

• expression de u_n en fonction de n et u_0

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + n \times r$ (cours), or $r = b$, donc $u_n = u_0 + br$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + br$.

2. $a \neq 1$

a. Remarquons d'abord que $a \neq 1$ donc $1 - a \neq 0$.

Pour $a \neq 1$ on a les équivalences :

$$x = a \times x + b \Leftrightarrow x - ax = b \Leftrightarrow x(1 - a) = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1 - a}$$

Donc l'équation de départ admet une unique solution :

$$c = \frac{b}{1 - a}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$

Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

c est solution de $x = ax + b$ donc $c = ac + b$ (*).

Méthode 1 (rédaction acceptée en première)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &= \frac{u_{n+1} - c}{u_n - c} \\ &= \frac{au_n + b - c}{u_n - c} \\ &= \frac{au_n + b - (ac + b)}{u_n - c} \quad (\text{en utilisant } (*)) \\ &= \frac{au_n + b - ac - b}{u_n - c} \\ &= \frac{au_n - ac}{u_n - c} \\ &= \frac{a(u_n - c)}{u_n - c} \\ &= a \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = a$ et a est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison a .

Méthode 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - c = au_n + b - (ac + b) = au_n + b - ac - b = au_n - ac \\ &= a(u_n - c) = av_n \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = a \times v_n$ et a est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison a .

• v_n en fonction de n et u_0 puis u_n en fonction de n et u_0

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$ (cours)

Or, $v_0 = u_0 - c$ et $q = a$ donc : $v_n = (u_0 - c) \times a^n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (u_0 - c) \times a^n$.

Or, $v_n = u_n - c$, donc : $u_n = v_n + c$. Avec l'expression de v_n , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - c) \times a^n + c$$

Or, $c = \frac{b}{1-a}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

Défi Suites 12

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{5 - u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2 , en déduire la nature de la suite (u_n) .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$v_n = \frac{1}{2 - u_n}$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2 , émettre une conjecture sur la nature de la suite (v_n) .

b. Démontrer cette conjecture.

c. Exprimer v_n en fonction de n .

3. Déduire de 2.c. que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 3}$$

4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 2$.

6. À l'aide d'un programme Python, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} \geq 1,99$.

Corrigé

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{5 - u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

$$u_1 = \frac{4 + u_0}{5 - u_0} = \frac{4 + 1}{5 - 1} = \frac{5}{4}$$

$$u_2 = \frac{4 + \frac{5}{4}}{5 - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{21}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{3 \times 7 \times 4}{4 \times 5 \times 3} = \frac{7}{5}$$

La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

On a d'une part :

$$u_1 - u_0 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{7}{5} - \frac{5}{4} = \frac{28}{20} - \frac{25}{20} = \frac{3}{20}$$

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

D'autre part, on a :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{5}{4}} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{7 \times 4}{5 \times 5} = \frac{28}{25}$$

On constate que : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$v_n = \frac{1}{2 - u_n}$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2 , émettre une conjecture sur la nature de la suite (v_n) puis démontrer cette conjecture.

$$v_0 = \frac{1}{2 - u_0} = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$v_1 = \frac{1}{2 - u_1} = \frac{1}{2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{8}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$v_2 = \frac{1}{2 - u_2} = \frac{1}{2 - \frac{7}{5}} = \frac{1}{\frac{10}{5} - \frac{7}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Vérification

n	u	v
0	1	1
1	1.25	1.5
2	1.4	1.6666666666666667
3	1.5	1.6666666666666667
4	1.5714	1.6666666666666667

On a :

$$v_1 - v_0 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$v_2 - v_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

On peut émettre la **conjecture** « (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ »

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2 - u_{n+1}} - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{4 + u_n}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{2(5 - u_n) - 4 - u_n}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{\frac{10 - 2u_n - (4 + u_n)}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{6 - 3u_n}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{5 - u_n}{3(2 - u_n)} - \frac{1}{2 - u_n} \\ &= \frac{5 - u_n}{3(2 - u_n)} - \frac{3 \times 1}{3(2 - u_n)} = \frac{5 - u_n - 3}{3(2 - u_n)} \\ &= \frac{2 - u_n}{3(2 - u_n)} = \frac{1 \times (2 - u_n)}{3 \times (2 - u_n)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ est une constante donc :

la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

c. Exprimer v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on : $v_n = v_0 + n \times r$ (cours), or $v_0 = 1$ et $r = \frac{1}{3}$, donc :

$$v_n = 1 + \frac{1}{3}n$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3 + n}{3}$$

3. Exprimer u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{1}{2 - u_n}$$

$$\frac{1}{v_n} = 2 - u_n$$

$$u_n = 2 - \frac{1}{v_n}$$

$$u_n = 2 - \frac{3}{3 + n}$$

$$u_n = \frac{2(3 + n)}{3 + n} - \frac{3}{3 + n}$$

$$u_n = \frac{6 + 2n - 3}{3 + n}$$

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 3}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n + 3}{n + 3}$$

4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

première méthode : utilisation du sens de variation d'une fonction

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 3}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - 1(2x+3)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+6-2x-3}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : 3, on en déduit que : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

n et $n+1$ appartiennent à $[0; +\infty[$, or f est strictement croissante sur cet intervalle donc elle conserve strictement le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle : on a $n < n+1$ donc $f(n) < f(n+1)$.

Or, $f(n) = u_n$ et $f(n+1) = u_{n+1}$ donc : $u_n < u_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ donc (u_n) est strictement croissante.

deuxième méthode : signe de $u_{n+1} - u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+3}{n+1+3} - \frac{2n+3}{n+3} \\ &= \frac{2n+5}{n+4} - \frac{2n+3}{n+3} \\ &= \frac{(2n+5)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{(2n+3)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^2+6n+5n+15}{(n+3)(n+4)} - \frac{2n^2+8n+3n+12}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^2+11n+15}{(n+3)(n+4)} - \frac{2n^2+11n+12}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^2+11n+15 - (2n^2+11n+12)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{3}{(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

Or, $n+3 > 0$, $n+4 > 0$, $(n+3)(n+4) > 0$, $3 > 0$ donc : $\frac{3}{(n+3)(n+4)} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2(n+3)}{n+3} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+6}{n+3} = \frac{2n+3-(2n+6)}{n+3} \\ &= \frac{2n+3-2n-6}{n+3} = \frac{-3}{n+3} \\ n+3 &> 0 \text{ et } -3 < 0 \text{ donc } \frac{-3}{n+3} < 0 \end{aligned}$$

$u_n - 2 < 0$ donc : $u_n < 2$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2$.

6. À l'aide d'un programme Python , déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} \geq 1,99$.

```

1 U=1
2 n=0
3 while U<1.99:
4     U=(4+U)/(5-U)
5     n=n+1
6 print("n_0=",n-1)

```

On obtient alors : $n_0=297$.

Conclusion : $n_0 = 297$.

Vérification

n	u				
290	1.9898				
291	1.9898				
292	1.9898				
293	1.9899				
294	1.9899				
295	1.9899				
296	1.99				
297	1.99				
298	1.99				
299	1.9901				
300	1.9901				

u(296)=1.989966555184

n	u				
290	1.9898				
291	1.9898				
292	1.9898				
293	1.9899				
294	1.9899				
295	1.9899				
296	1.99				
297	1.99				
298	1.99				
299	1.9901				
300	1.9901				

u(297)=1.99000000000001

Défi Suites 13

Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 7$ telle que pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n + 4n + 5$.

- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- Calculer u_1 et u_2 .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2n^2$.
 - Calculer v_0, v_1, v_2 . Émettre une conjecture sur la nature de la suite (v_n) puis démontrer cette conjecture.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - Exprimer u_n en fonction de n .

Corrigé

$u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4n + 5$

Avec la calculatrice

n	u	v
0	7	7
1	12	10
2	21	13
3	34	16
4	51	19
5	72	22
6	97	25
7	126	28
8	159	31
9	196	34
10	237	37

Graph1 Graph2 Graph3
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
nMin=0
u(n+1) = u(n) + 4n + 5
u(0) = 7
u(1) =
v(n+1) = u(n+1) - 2(n+1)²
v(0) =
v(1) =
n=0

- Sens de variation de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - u_n = u_n + 4n + 5 - u_n = 4n + 5$.

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc : $4n + 5 > 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

- Calculer u_1 et u_2 .

$$u_1 = u_0 + 4(0) + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$u_2 = u_1 + 4(1) + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2n^2$.

- Calculer v_0, v_1, v_2 .

$$v_0 = u_0 - 2(0)^2 = 7 - 0 = 7$$

$$v_1 = u_1 - 2(1)^2 = 12 - 2 = 10$$

$$v_2 = u_2 - 2(2)^2 = 21 - 2 \times 4 = 21 - 8 = 13$$

On a : $v_1 - v_0 = 10 - 7 = 3$ et $v_2 - v_1 = 13 - 10 = 3$.

On émette la conjecture : « (v_n) est arithmétique de raison 3 ».

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n$$

$$= u_{n+1} - 2(n+1)^2 - (u_n - 2n^2)$$

$$= u_n + 4n + 5 - 2(n^2 + 2n + 1) - u_n + 2n^2$$

$$= u_n + 4n + 5 - 2n^2 - 4n - 2 - u_n + 2n^2$$

$$= 3$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = 3$ et 3 est une constante donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3.

- Exprimer v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 + nr$ (cours), or $v_0 = 7$ et $r = 3$

donc $v_n = 7 + 3n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3n + 7$.

- Exprimer u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - 2n^2$, or on a montré en **b.** que $v_n = 3n + 7$,

donc $3n + 7 = u_n - 2n^2$, autrement dit : $3n + 7 + 2n^2 = u_n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 + 3n + 7$.

Vérification

Pour $n = 2$, la formule précédente donne :

$$u_2 = 2(2)^2 + 3(2) + 7 = 2 \times 4 + 6 + 7 = 8 + 6 + 7 = 21 \quad \checkmark$$

Défi Suites 14

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

autrement dit, que :

$$0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Corrigé

Posons $S = 0 + \dots + n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

On a donc : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrons que la suite (u_n) est arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - n = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1$ et 1 est une constante donc (u_n) est arithmétique de raison 1.

Donc, d'après le cours :

$$u_0 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}$$

Or, $u_0 = 0$ et $u_n = n$ donc :

$$u_0 + \dots + u_n = \frac{(0 + n) \times (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On a donc bien :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Défi Suites 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^2$$

autrement dit : $S_n = 0^2 + 1^2 + \dots + n^2$.

1. Calculer S_1 , S_2 et S_3 .

2. Pour tout réel x on pose $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ où a , b et c sont trois constantes pour lesquelles : $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ et $f(3) = 14$.

a. Justifier que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a , b et c .

b. Écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{g(x)}{6}$ où $g(x)$ est un produit de trois facteurs

du

premier degré à préciser.

3. On considère la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a. Justifier que : $u_0 = S_0$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (n+1)^2$

et justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

Conclusion

Les suites (S_n) et (u_n) ont leurs premiers termes respectifs égaux et elles obéissent à la même relation de récurrence donc elles sont égales, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

autrement dit :

$$0^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corrigé

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3 .

$$S_0 = 0^2 \quad S_1 = 0^2 + 1^2 = 1^2 \quad S_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$$

$$S_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, f(1) = 1, f(2) = 5$ et $f(3) = 14$

a. Justifier que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ donc :

$$\bullet f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = a + b + c$$

Or $f(1) = 1$ donc : $a + b + c = 1$ (*).

$$\bullet f(2) = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) = 8a + 4b + 2c$$

Or $f(2) = 5$ donc : $8a + 4b + 2c = 5$ (**).

$$\bullet f(3) = a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) = 27a + 9b + 3c$$

Or $f(3) = 14$ donc : $27a + 9b + 3c = 14$ (***)).

Il résulte de (*), (**) et (***) que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

Isolons c dans la première ligne : $c = 1 - a - b$ puis remplaçons dans les deux autres lignes du système :

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2(1 - a - b) = 5 \\ 27a + 9b + 3(1 - a - b) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 3 \\ 24a + 6b = 11 \end{cases}$$

En multipliant par 4 la première ligne et par 3 la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{cases} 24a + 8b = 12 \\ 24a + 6b = 11 \end{cases}$$

puis par soustraction : $2b = 1$ autrement dit : $b = \frac{1}{2}$.

En remplaçant dans : $6a + 2b = 3$, on obtient :

$$6a + 1 = 3 \Leftrightarrow 6a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Puis en remplaçant dans : $c = 1 - a - b$, on obtient :

$$c = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Finalement :

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6}$$

Vérification

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MF	
$\frac{1}{3} \rightarrow A: \frac{1}{2} \rightarrow B: \frac{1}{6} \rightarrow C$	
A+B+C	$\frac{1}{6}$
8A+4B+2C	1
27A+9B+3C	5
	14

b. Écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{g(x)}{6}$ où $g(x)$ est un produit de trois facteurs du premier degré à préciser.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{2x^3}{6} + \frac{3x^2}{6} + \frac{x}{6} \\ &= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \frac{x(2x^2 + 3x + 1)}{6} \end{aligned}$$

$2x^2 + 3x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = 3$ et $c = 1$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$.

$\Delta > 0$ donc $2x^2 + 3x + 1$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 + 1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x :

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x + 1) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

ou encore : $2x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(2x + 1)$.

On a donc, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{x(x + 1)(2x + 1)}{6}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

a. Justifier que : $u_0 = S_0$

$$u_0 = \frac{0(0 + 1)(2(0) + 1)}{6} = 0 \text{ et } S_0 = 0^2 = 0, \text{ donc : } u_0 = S_0.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3) - n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\ &= \frac{(n + 1)[(n + 2)(2n + 3) - n(2n + 1)]}{6} \\ &= \frac{(n + 1)(2n^2 + 3n + 4n + 6 - 2n^2 - n)}{6} \\ &= \frac{(n + 1)(6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \times 6(n + 1)}{6} \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (n + 1)^2$.

D'autre part : $S_{n+1} = 0^2 + 1^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2$.

Or, $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = S_n$ donc : $S_{n+1} = S_n + (n + 1)^2$.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + (n + 1)^2$.

Défi Suites 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^3 = 0^3 + \dots + n^3$$

1. Déterminer les valeurs de S_2 et S_3 puis comparer chacun de ces nombres avec la somme des entiers consécutifs de 0 à 2 et la somme des entiers consécutifs de 0 à 3 respectivement. En déduire une conjecture sur la forme explicite de $S_n, n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

a. Justifier que $u_0 = S_0$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (n + 1)^3$.
et justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + (n + 1)^3$.

Conclusion

Les suites (S_n) et (u_n) ont leurs premiers termes respectifs égaux et elles obéissent à la même relation de récurrence donc elle sont égales, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Corrigé

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n k^3 = 0^3 + 1^3 + \dots + n^3$$

1. Déterminer les valeurs de S_2 et S_3 puis comparer chacun de ces nombres avec la somme des entiers consécutifs de 1 à n .

$$\bullet S_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 0 + 1 + 8 = 9$$

Or, $0 + 1 + 2 = 3$ et $3^2 = 9$ donc : $S_2 = (0 + 1 + 2)^2$.

$$\bullet S_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 0 + 1 + 8 + 27 = 36$$

Or, $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ et $6^2 = 36$, donc : $S_3 = (0 + 1 + 2 + 3)^2$.

En déduire une conjecture sur la forme explicite de S_n , $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

autrement dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\text{conjecture})$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a. Justifier que $u_0 = S_0$.

On a d'une part : $u_0 = 0$ et d'autre part $S_0 = 0^3 = 0$ donc $u_0 = S_0$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n + (n+1)^3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2 - n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2[(n+2)^2 - n^2]}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4 - n^2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 4(n+1)}{4} \\ &= \frac{4 \times (n+1)^3}{4} \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

On a : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3$ autrement dit : $u_{n+1} = u_n + (n+1)^3$.

Justifier que : $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.

$$S_{n+1} = 0^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

Or, $0^3 + \dots + n^3 = S_n$ donc : $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.

Défi Suites 17 Deux suites imbriquées

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par leurs premiers termes respectifs $a_0 = 1$, $b_0 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

- Pour tout entier naturel n on pose : $c_n = b_n - a_n$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $b_n = a_n + 2$.
- Justifier que pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 3a_n + 2$.
- Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = a_n + 1$.
 - Calculer u_0 .
 - Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - Exprimer u_n en fonction de n , en déduire a_n en fonction de n .
- Exprimer b_n en fonction de n .
- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $a_n + b_n$ est un multiple de 12.

Corrigé

$a_0 = 1$, $b_0 = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = b_n - a_n$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} = a_n + 2b_n - (2a_n + b_n) \\ &= a_n + 2b_n - 2a_n - b_n = -a_n + b_n = b_n - a_n = c_n \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n + 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n$ donc (c_n) est une suite constante,

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $c_n = c_0$, or $c_0 = b_0 - a_0 = 3 - 1 = 2$, donc $c_n = 2$,

or $c_n = b_n - a_n$, donc : $b_n - a_n = 2$, autrement dit : $b_n = a_n + 2$.

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n + 2$.

2. Justifier que pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \text{ or } : b_n = a_n + 2 \text{ donc } : a_{n+1} = 2a_n + a_n + 2$$

autrement dit : $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3a_n + 2$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n + 1$

a. Calculer u_0 .

$$u_0 = a_0 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$$u_0 = 2$$

b. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = a_{n+1} + 1 = 3a_n + 2 + 1 = 3a_n + 3 = 3(a_n + 1) = 3u_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n$ et 3 est une constante

donc (u_n) est géométrique de raison 3.

c. Exprimer u_n en fonction de n , en déduire a_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ (cours), or } u_0 = 2 \text{ et } q = 3 \text{ donc } u_n = 2 \times 3^n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n.$$

Or, $u_n = a_n + 1$, donc : $2 \times 3^n = a_n + 1$, autrement dit :

$$a_n = 2 \times 3^n - 1$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2 \times 3^n - 1$.

4. Exprimer b_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $b_n = a_n + 2$ et $a_n = 2 \times 3^n - 1$ donc $b_n = 2 \times 3^n - 1 + 2$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2 \times 3^n + 1$.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $a_n + b_n$ est un multiple de 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= 2 \times 3^n - 1 + 2 \times 3^n + 1 = 2 \times 3^n + 2 \times 3^n = 4 \times 3^n \\ &= 4 \times 3 \times 3^{n-1} = 12 \times 3^{n-1} \end{aligned}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geq 1$, par conséquent $3^{n-1} \in \mathbb{N}$.

Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a_n + b_n = 12 \times q$, à savoir $q = 3^{n-1}$, donc le nombre entier $a_n + b_n$ est un multiple de 12.

Vérification

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP				NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
APP SUR + POUR ΔTb1				APP SUR + POUR ΔTb1			
Graph1	Graph2	Graph3		n	u	v	w
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)		0	1	3	4
nMin=0				1	5	7	12
%u(n+1)≡2u(n)+v(n)				2	17	19	36
u(0)≡1				3	53	55	108
u(1)=				4	161	163	324
%v(n+1)≡u(n)+2v(n)				5	485	487	972
v(0)≡3				6	1457	1459	2916
v(1)=				7	4373	4375	8748
%w(n+1)≡u(n+1)+v(n+1)				8	13121	13123	26244
				9	39365	39367	78732
				10	118097	118099	236196
				n=0			

Défi Suites 18 Deux suites imbriquées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes respectifs $u_0 = 10, v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = u_n + v_n$.

À l'aide de la calculatrice, visualiser les cinq premiers termes de (u_n) , (v_n) et (s_n) .

En déduire une conjecture sur la nature de (s_n) puis démontrer cette conjecture.

2. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x = \frac{3}{5}x + 2$.

Donner sa solution c sous forme de fraction irréductible.

3. Pour tout entier naturel n on pose : $w_n = u_n - c$.

a. Calculer w_0 .

b. Montrer que (w_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Exprimer w_n en fonction de n , en déduire u_n en fonction de n .

4. Exprimer v_n en fonction de n .

5. Étude plus précise de (u_n)

a. Démontrer que (u_n) est strictement décroissante.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 5$.

c. À l'aide d'un programme Python déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} - 5 < 0,000\,001$.

Corrigé :

$$u_0 = 10, v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = u_n + v_n$. À l'aide de la calculatrice, visualiser les dix premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .

n	u	v
0	10	0
1	8	2
2	6,8	3,2
3	6,08	3,92
4	5,648	4,352
5	5,3888	4,6112
6	5,2333	4,7667
7	5,14	4,86
8	5,084	4,916
9	5,0504	4,9496
10	5,0302	4,9698

En déduire une conjecture sur la suite (s_n) puis la démontrer.

On constate que :

$$u_0 + v_0 = 10, \text{ donc : } s_0 = 10$$

$$u_1 + v_1 = 8 + 2 = 10, \text{ donc : } s_1 = 10$$

$$u_2 + v_2 = 6,8 + 3,2 = 10, \text{ donc : } s_2 = 10$$

et ainsi de suite.

On peut donc conjecturer que : « pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n = 10$ ».

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n = u_n + v_n = s_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} - s_n = 0$ et 0 est une constante donc la suite (s_n) est arithmétique de raison 0, donc c'est une suite constante.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = s_0$.

Or, $s_0 = u_0 + v_0 = 10 + 0 = 10$, donc on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 10$.

2. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la question précédente : $u_n + v_n = 10$, autrement dit : $v_n = 10 - u_n$.

Or,

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n$$

donc :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}(10 - u_n) = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5} \times 10 - \frac{1}{5}u_n = \frac{3}{5}u_n + 2$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$$

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x = \frac{3}{5}x + 2$.

Donner sa solution c sous forme de fraction irréductible.

On a les équivalences :

$$x = \frac{3}{5}x + 2 \Leftrightarrow \frac{5}{5}x - \frac{3}{5}x = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow x = 2 \times \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow x = 5$$

L'équation de départ admet pour unique solution : 5, donc : $c = 5$.

3. Pour tout entier naturel n on pose : $w_n = u_n - c = u_n - 5$.

a. Calculer w_0 .

$$w_0 = u_0 - 5 = 10 - 5 = 5$$

b. Montrer que (w_n) est géométrique et préciser sa raison.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{3}{5}u_n + 2 - 5 = \frac{3}{5}u_n - 3 = \frac{3}{5}\left(u_n - \frac{3}{\frac{3}{5}}\right) \\ = \frac{3}{5}\left(u_n - 3 \times \frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5}(u_n - 5) = \frac{3}{5}w_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{3}{5}w_n$ et $\frac{3}{5}$ est une constante donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

c. Exprimer w_n en fonction de n , en déduire u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_n = w_0 \times q^n$ (cours), or : $w_0 = 5$ et $q = \frac{3}{5}$

$$\text{donc : } w_n = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

On a : $w_n = u_n - 5$, donc : $u_n = w_n + 5$, or $w_n = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5$$

4. Exprimer v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + v_n = 10$, donc : $v_n = 10 - u_n$, or $u_n = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5$,

donc :

$$v_n = 10 - \left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5\right) = 10 - 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 5 = 5 - 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 - 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

5. Étude plus précise de la suite (u_n)

a. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 5 - \left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5\right) \\ = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 5 - 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 5 = 5 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \times 1 \\ = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \left[\frac{3}{5} - 1\right] = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Or, $\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$ et $-2 < 0$, donc : $u_{n+1} - u_n < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.